

ÇEŞİTLİ SINIR ŞARTLARINA SAHİP ELASTİK KİRİŞLERİN HAREKETLİ YÜK ETKİSİ ALTINDA DİNAMİK ANALİZİ

Volkan Kahya ¹, Mehmet Akköse ¹, Ragıp Erdöl ²

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 61080, Trabzon, Türkiye

ÖZET

Bu çalışmada, sabit hızla hareket eden tekil yük etkisi altındaki Euler-Bernoulli kirişlerinin değişik sınır şartları için dinamik analizleri yapılmıştır. Kirişlerin hareketli yük etkisi altındaki davranışı analitik ve sayısal metotlar kullanılarak elde edilmiş ve yük hızının dinamik davranış üzerindeki etkileri incelenmiştir.

ABSTRACT

DYNAMIC ANALYSIS OF ELASTIC BEAMS WITH VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS UNDER A MOVING LOAD

In this study, dynamic analyses of Euler-Bernoulli beams to a moving force with constant speed for various boundary conditions are carried out. The dynamic responses of beams are obtained by using an analytical and a numerical method and effects of the load speed on the dynamic behavior are studied.

1. GİRİŞ

Hareketli yük problemleri, yapı dinamiğinin temel problemlerindendir. Böyle yüklerden dolayı yapılarda meydana gelen yer değiştirme ve gerilmeler, statik yüklerden dolayı meydana gelenlere göre önemli ölçüde artış göstermektedir. Bu sebeple, hareketli yükler etkisi altında yapının nasıl davrandığının doğru bir şekilde anlaşılması gereklidir. Hareketli yük problemlerinin tipik mühendislik uygulamaları arasında, karayolu ve demiryolu köprüleri, hızlı tren etkisi altındaki demiryolu rayları, bilgisayar disk sürücüler, malzeme taşıma-aktarma araçları, yüksek hızlı hassas makine parçaları ve boru sistemleri sayılabilir. İnşaat, makine, endüstri ve elektronik gibi çeşitli mühendislik dallarında uygulamalarının olması,

¹ Yrd. Doç. Dr.

² Prof. Dr.

araştırmacıların konuya ilgisini artırmaktadır. Literatüre bakıldığında, hareketli yükün genel olarak 3 şekilde modellendiği görülür: Hareketli kuvvet modeli, hareketli kütle modeli ve hareketli araç modeli.

Hareketli kuvvet modelinde [1–10, 20–25, 27], yükün atalet etkileri ve yük ile yapı arasındaki dinamik etkileşim ihmal edilmektedir. Bu model, taşıt trafiği etkisi altında köprü titreşimlerinin incelenmesinde araştırmacılar tarafından benimsenen en basit modeldir. Model, yükün hareketinden dolayı yapının davranışını etkileyen esas dinamik karakteristiklerin yeterli doğrulukta belirlenebilmesini mümkün kılmaktadır. Hareketli kuvvet modeli, yük kütlelerinin yapıninkine göre çok küçük olduğu durumlarda başarıyla uygulanabilir. Karayolu köprüleri, bu modelin uygulanabileceği yapılara örnek olarak verilebilir.

Yükün kütlelerinin ve hızının küçük olmadığı durumlarda atalet etkileri ihmal edilemez. Bu tip problemlerde yük, hareketli kütle şeklinde modellenir [1, 11–21, 26]. Bu model, araç-köprü etkileşim problemleri için kullanılabilecek en basit modeldir. Kütleyle yapı arasında temasın sürekli olduğu kabul edildiğinden, hareket yüzeyinin pürüzlü olması durumunda model başarısız olmaktadır.

Hareketli yük problemlerinin modellenmesinde araştırmacılar tarafından kullanılan diğer bir model, hareketli araç modelidir [1, 20, 22]. Burada yük, bir veya daha fazla serbestlik dereceli hareketli sistem olarak modellenmekte; araç-yapı etkileşimi ve yükün atalet etkileri göz önüne alınmaktadır. Böylece problemin daha gerçekçi bir modellenmesi yapılabilmektedir.

Hareketli yük problemlerinin çözümüyle ilgili çok sayıda analitik ve sayısal metot geliştirilmiştir. Hareketli kuvvet etkisi altındaki tek açıklıklı kirişler, basit olmaları sebebiyle özellikle analitik çözümler için uygundur. Fryba [1], sonlu Fourier ve Laplace-Carson dönüşümlerini kullanarak çeşitli problemlerin analitik çözümünü yapmıştır. Hamada [2], çift katlı Laplace dönüşümü uygulayarak sabit hızla hareket eden tekil kuvvet etkisi altındaki basit mesnetli Euler kirişi için yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti ifadelerini kapalı formda elde etmiştir. Timoshenko kirişi üzerinde hareket eden yük problemi, Mackertich [3] tarafından çözülmüştür. Araştırmacı, yer değiştirmeleri modal seri açılımı şeklinde kabul ederek analitik çözüm yapmıştır. Hareketli yük problemlerinin analitik çözümlerinde yaygın olarak kullanılan mod-yer değiştirme ve mod-ivme metotlarının karşılaştırması Baber ve Massarelli [4] tarafından yapılmıştır. [2–4] nolu çalışmalarda çözümler basit mesnetli kiriş için yapılmıştır. Çeşitli sınır şartlarına sahip elastik kirişlerin deterministik [5, 6] ve stokastik [7, 8] hareketli yükler etkisi altında enine titreşimlerinin incelendiği çalışmalar da mevcuttur. Bu çalışmalarda, yükün sabit ve ivmeli hızlarla hareket etmesi durumlarında yer değiştirme için kapalı formda çözümler elde edilmiştir. Pesterev v.d. [9, 10], hareketli kuvvet modelini kullanarak, elastik kirişlerde yer değiştirme, eğilme momenti ve kesme kuvvetini analitik olarak elde etmişlerdir.

Literatürde yükün atalet etkilerinin dikkate alındığı çalışmalar da azımsanmayacak kadar çoktur. Stanisic [11] ve Mackertich [12], hareketli yük etkisi altındaki basit kiriş problemini modal seri açılımını kullanarak çözmüşlerdir. Çeşitli sınır şartlarına sahip elastik kirişlerin hareketli kütle etkisi altındaki dinamik titreşimleri Mofid ve çalışma arkadaşları tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalarda çözüm için yarı analitik bir metot geliştirilmiştir [13–16].

Ting v.d. [17], hareketli kütle problemlerinin çözümü için bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu algoritma ile yer değiştirmeyi ifade eden integro-diferansiyel denklem sayısal olarak çözülmüştür. Aynı problem, Sadiku ve Leipholz [18] tarafından ele alınmış ve çözüm Green fonksiyonu formülasyonu ile yapılmıştır. Foda ve Abduljabbar [19], aynı problemi dinamik Green fonksiyonları yardımıyla çözmüşlerdir.

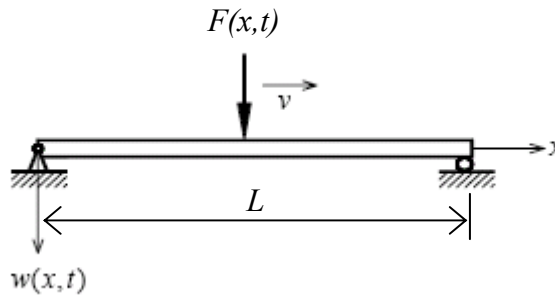
Basit veya daha karmaşık hareketli araç modelleri kullanılarak araç-yapı etkileşiminin incelendiği problemlerle ilgili geniş literatür [1] ve [20] nolu kaynaklarda bulunabilir.

Problemin yapısı karmaşıktıkça analitik metotların kullanılması zorlaşmaktadır. Sonlu elemanlar metodu, elastik kirişlerin hareketli yük etkisi altında davranışlarının incelenmesinde pek çok araştırmacı tarafından yaygın olarak kullanılmaktadır [20–27]. Bu metot kullanılarak elde edilen sonuçlar oldukça tatminkârdır.

Bu çalışmada, sabit hızla hareket eden tekil yük etkisi altındaki Euler-Bernoulli kirişlerinin değişik sınır şartları için dinamik analizleri yapılmıştır. Basit, ankastre ve konsol kirişler için analitik ve sonlu eleman çözümlerinden elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı grafiklerle sunulmuştur.

2. PROBLEMİN TANIMI

Çalışmada L uzunluğunda ve değişik sınır şartlarına sahip elastik kirişin sabit hızla hareket eden tekil yük etkisi altındaki enine titreşimleri incelenmiştir. Kirişin sönümsüz olduğu ve başlangıçta herhangi bir titreşim yapmadığı kabul edilmiştir. Basit mesnetli kiriş için problemin geometrisi Şekil 1’de verilmiştir.



Şekil 1. Hareketli yük etkisindeki basit kiriş [25]

Elastik kirişin hareketli yük etkisi altında yer değiştirmeleri aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilmektedir.

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (1)$$

Burada, EI kirişin eğilme rijitliğini, m birim uzunluğa gelen kiriş kütlesini ve $w(x, t)$ yer değiştirmeyi göstermektedir. $F(x, t)$ dış yük olup

$$F(x, t) = P \delta(x - vt) \quad (2)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada P ve v sırasıyla yükün şiddetini ve hızını, $\delta(\dots)$ ise Dirac delta fonksiyonunu göstermektedir. Yer değiştirmeler, (1) diferansiyel denkleminin Tablo 1’de verilen sınır şartları ve aşağıdaki başlangıç şartları altında çözülmesiyle elde edilir.

$$w(x,0) = \dot{w}(x,0) = 0 \quad (3)$$

Burada ($\dot{}$), $\partial/\partial t$ türevini göstermektedir.

Tablo 1. Çalışmada kullanılan sınır şartları

Sol uç	Sağ uç	Sınır şartları
Sabit	Sabit	$w(0) = w''(0) = w(L) = w''(L) = 0$
Ankastre	Ankastre	$w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0$
Ankastre	Serbest	$w(0) = w'(0) = w''(L) = w'''(L) = 0$
Serbest	Ankastre	$w''(0) = w'''(0) = w(L) = w'(L) = 0$

3. ANALİTİK ÇÖZÜM

Homojen, elastik bir kirişte yer değiştirmelerinin elde edilmesi için (1) diferansiyel denklemi yerine aşağıdaki integro-diferansiyel denklem göz önüne alınabilir [1, 9, 17, 18].

$$w(x,t) = \int_0^L G(x,s)F(s,t)ds - \int_0^L mG(x,s)\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2}ds \quad (4)$$

Burada, $G(x,s)$ Green fonksiyonu olarak adlandırılmakta olup, kiriş üzerindeki herhangi bir s noktasına etkiyen 1 birimlik statik yükten dolayı x noktasında meydana gelen yer değiştirmeyi ifade etmektedir. (2) ifadesi (4)'te yerine konulur ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$w(x,t) = G(x,vt)P - \int_0^L mG(x,s)\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2}ds \quad (5)$$

şeklinde (4) ifadesi yeniden yazılabilir. (5) integro-diferansiyel denkleminin çözümü

$$w(x,t) = w_p(x,t) + w_h(x,t) \quad (6)$$

şeklinde özel ve homojen çözümlerin toplamından oluşmaktadır. Özel çözüm, Green fonksiyonu ile yükün çarpımı şeklinde ifade edilebilir [1, 17–19]. Homojen çözüm ise (1) diferansiyel denkleminin modal seri açılımıyla homojen çözümüne eşittir. Bu çözümlerin elde edilmesi uzun işlemler gerektirmektedir. Bunun yerine bu çalışmada daha kısa olan aşağıdaki çözüm metodu benimsenmiştir.

(5) ifadesinin sağ tarafındaki integralde görülen $w(x,t)$ yer değiştirmesi $0 \leq x \leq L$ ve $0 \leq t \leq L/v$ aralıklarında yakınsak bir seri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir [1, 9, 18].

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)q_j(t) \quad (7)$$

Burada $\phi_j(x)$ normal modları göstermekte olup

$$\phi_j(x) = \sin \frac{\lambda_j x}{L} + A_j \cos \frac{\lambda_j x}{L} + B_j \sinh \frac{\lambda_j x}{L} + C_j \cosh \frac{\lambda_j x}{L} \quad (8)$$

şeklinde tanımlıdır [1]. Bu ifadede, λ_j , A_j , B_j ve C_j kirişin sınır şartlarından elde edilecek olan sabitlerdir. $q_j(t)$ ise genelleştirilmiş koordinatları göstermekte olup

$$q_j(t) = \frac{1}{M_j \omega_j} \int_0^t [Z(0,L,\tau) + P\phi_j(v\tau)] \sin \omega_j(t-\tau) d\tau \quad (9)$$

$$M_j = \int_0^L m \phi_j^2(x) dx, \quad \omega_j = \frac{\lambda_j^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (10)$$

$$Z(0, L, t) = q_j(t) \{ [EI\phi_j'(x)\phi_j''(x)]_0^L - [EI\phi_j(x)\phi_j'''(x)]_0^L \} \quad (11)$$

şeklindedir. Bu ifadelerde, EI kirişin eğilme rijitliğini, ω_j doğal dairesel frekansı göstermektedir. (9) ifadesinin elde edilişi ile ilgili ayrıntılar [1] nolu kaynakta bulunabilir. Bu ifadede görülen $Z(0, L, t)$ terimi, geometrik sınır şartlarının tümünü içermektedir ve Tablo 1’de verilen sınır şartları için sıfır olacağı açıktır [1].

Benzer şekilde, $G(x, s)$ Green fonksiyonu da $0 \leq x, s \leq L$ aralığında yakınsak aşağıdaki seriye açılabilir [1, 9, 18].

$$G(x, s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(x)\phi_j(s)}{\omega_j^2 M_j} \quad (12)$$

(7) ve (12) ifadeleri (5)’teki integralde yerlerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılır ve normal modların ortogonalite özelliğinden de faydalanılırsa

$$\int_0^L mG(x, s) \frac{\partial^2 w(s, t)}{\partial t^2} ds = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^2} \phi_j(x) \ddot{q}_j(t) \quad (13)$$

eşitliği elde edilir. Buna göre, (5) integro-diferansiyel denkleminin çözümü

$$w(x, t) = G(x, vt)P - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^2} \phi_j(x) \ddot{q}_j(t) \quad (14)$$

şeklinde elde edilir [1, 9, 18]. (8), (10) ve (11) ifadeleri (9)’da yerlerine yazılarak gerekli işlemler yapılırsa $Z(0, L, t) = 0$ için $\ddot{q}_j(t)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j(t) = & \sum_{j=1, \dots, k-1, k+1, \dots}^{\infty} \frac{P}{M_j} \left\{ \frac{\omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2} \left[-\frac{\omega^2}{\omega_j^2} \sin \omega_j t + \frac{\omega}{\omega_j} \sin \omega_j t + A_j \left(-\frac{\omega^2}{\omega_j^2} \cos \omega t + \cos \omega_j t \right) \right] \right. \\ & + \frac{\omega_j^2}{\omega_j^2 + \omega^2} \left[B_j \left(\frac{\omega^2}{\omega_j^2} \sinh \omega t + \frac{\omega}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) + C_j \left(\frac{\omega^2}{\omega_j^2} \cosh \omega t + \cos \omega_j t \right) \right] \Bigg\} \\ & + \frac{P}{2M_k} [\sin \omega_k t + \omega_k t \cos \omega_k t + A_k (2 \cos \omega_k t - \omega_k t \sin \omega_k t) \\ & + B_k (\sinh \omega_k t + \sin \omega_k t) + C_k (\cosh \omega_k t + \cos \omega_k t)] \end{aligned} \quad (15)$$

Bu ifadede, $\omega = \lambda_j v / L$ olup yükün frekansıdır. $G(x, s)$ Green fonksiyonları klasik sınır şartlarına sahip her bir kiriş tipi için Ek-1’de verilmiştir.

4. SONLU ELEMAN ÇÖZÜMÜ

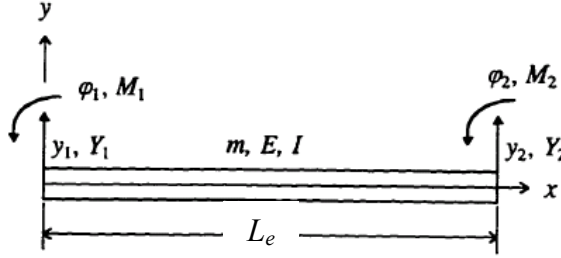
Çok serbestlik dereceli sönümsüz bir sistem için hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (16)$$

Burada,

$$[M] = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad [K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu ifadelerde, $\{\ddot{u}\}$ ve $\{u\}$ sırasıyla ivme ve yer değiştirme vektörlerini $[M]$ ve $[K]$ sırasıyla sistem kütle ve rijitlik matrislerini, $\{F(t)\}$ dış kuvvet vektörünü göstermektedir.



Şekil 2. Çalışmada kullanılan kiriş elemanı [24]

Çalışmada, Şekil 2’de görülen 4 serbestlik dereceli kiriş elemanı kullanılmıştır. Tekil kuvvet etkisi altındaki bir kirişte, kuvvetin üzerinde bulunduğu elemana ait düğüm noktalarındakiler hariç diğer bütün düğüm noktalarında kuvvet ve momentler sıfırdır. Buna göre $\{F(t)\}$,

$$\{F(t)\} = \{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ Y_1^{(s)} \ M_1^{(s)} \ Y_2^{(s)} \ M_2^{(s)} \ \dots \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (18)$$

şeklinde yazılabilir [22, 25, 27]. $Y_i^{(s)}$ ve $M_i^{(s)}$ ($i=1,2$) düğüm noktalarındaki eşdeğer kuvvet ve momentler olup

$$\{F^{(s)}(t)\} = \{Y_1^{(s)} \ M_1^{(s)} \ Y_2^{(s)} \ M_2^{(s)}\}^T = P\{N(x)\}|_{x=vt} \quad (19)$$

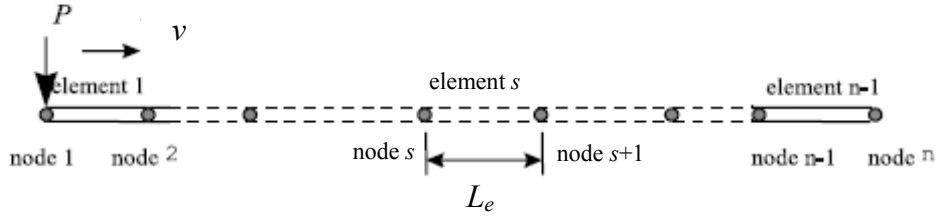
şeklinde tanımlıdır. Burada

$$\{N(x)\} = \{N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x) \ N_4(x)\}^T \quad (20)$$

eleman şekil fonksiyonlarını içeren vektördür. $N_i(x)$ ($i=1-4$) ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad N_2 = \xi L(1 - 2\xi + \xi^2), \quad N_3 = \xi^2(3 - 2\xi), \quad N_4 = \xi^2 L(\xi - 1) \quad (21)$$

Bu ifadelerde $\xi = x/L_e$ dir.



Şekil 3. Hareketli tekil yük etkisine maruz kirişte sonlu eleman modeli [25]

Şekil 3’te görülen n düğüm noktalı $(n-1)$ elemanlı kiriş üzerinde P tekil yükü v sabit hızıyla hareket etmektedir. Yükün kiriş üzerinden geçiş süresi $t_a = k\Delta t$ olsun. Burada k toplam zaman adımı sayısı, Δt ise zaman artımıdır. Herhangi bir $t = r\Delta t$ anında hareketli yükün kirişin sol ucuna göre konumu

$$x_p(t) = vr\Delta t \quad (r=1, \dots, k) \quad (22)$$

olacaktır [25]. Bu konumda yük,

$$s = \left\lceil \frac{x_p(t)}{L_e} \right\rceil + 1 \quad (23)$$

nolu eleman üzerinde bulunmaktadır. Bu elemanın düğüm noktaları s ve $s+1$ olup, bu noktalara etkiyen eşdeğer kuvvet ve momentler

$$\begin{aligned} Y_{t=r\Delta t}^s &= PN_1, & Y_{t=r\Delta t}^{s+1} &= PN_3, & M_{t=r\Delta t}^s &= PN_2, & M_{t=r\Delta t}^{s+1} &= PN_4, \\ Y_{t=r\Delta t}^i &= 0, & M_{t=r\Delta t}^i &= 0 \quad (i=1, \dots, n, \quad i \neq s, s+1) \end{aligned} \quad (24)$$

şeklinde elde edilirler. Burada (21) ile verilen N_i ($i=1-4$) ifadelerinde, $\xi = x/L_e$ yerine $\xi = [x_p(t) - (s-1)L_e]/L_e$ yazılmalıdır.

5. SONUÇLAR

Çeşitli sınır şartlarına sahip elastik Bernouilli-Euler kirişlerinin hareketli sabit yük etkisi altında dinamik analizi yapılmıştır. Basit kiriş ve ankastre kiriş için kiriş orta noktasındaki, konsol kiriş için ise kiriş uç noktasındaki yer değiştirmelerin hıza bağlı olarak zamanla değişimini gösteren grafikler sunulmuştur. Şekillerde, w_0 maksimum statik yer değiştirmeyi, $t_a = L/v$ yükün kiriş üzerinden geçiş süresini göstermektedir. Boyutsuz hız $\alpha = v/v_{cr}$ şeklinde tanımlıdır. Burada $v_{cr} = (\lambda_1/L)\sqrt{EI/m}$ kritik hızdır.

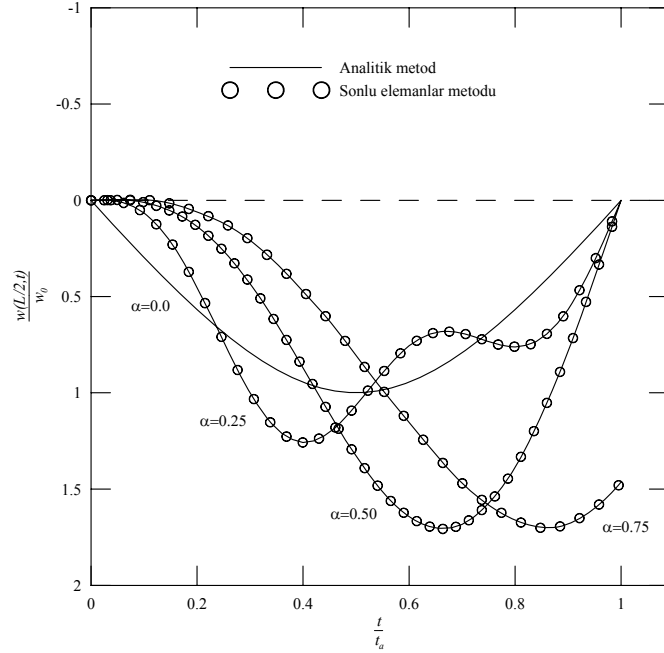
Problem sonlu eleman çözümü, 4 elemanlı ve 5 düğüm noktalı kiriş için yapılmıştır. (16) hareket denkleminin sayısal çözümü için merkezi farklar metodu kullanılmıştır. Şekil 4 -7'ye dikkat edilirse, oldukça az sayıda eleman kullanılmış olmasına rağmen analitik ve sonlu eleman çözümlerinin üst üste düştüğü görülmektedir.

Şekil 4'te, iki ucu basit mesnetli kirişte, kiriş orta noktasındaki boyutsuz yer değiştirmenin çeşitli boyutsuz hız değerleri için zamanla değişimi verilmiştir. Şekilde, $\alpha = 0$ statik yer değiştirmeyi göstermektedir. Hız arttıkça maksimum yer değiştirmeler de artmaktadır. $\alpha = 0.25$ için yer değiştirmelerin statik yer değiştirme eğrisi etrafında salınım yaptığı görülmektedir [1, 5, 21, 24]. Ayrıca, hız arttıkça maksimum yer değiştirmenin meydana geldiği yer, kirişin sağ ucuna doğru yaklaşmaktadır. $\alpha = 0.75$ için, yük kirişi terk ettiği anda kiriş orta noktasında $w/w_0 \cong 1.5$ civarında bir yer değiştirme kaldığı şekilden görülmektedir.

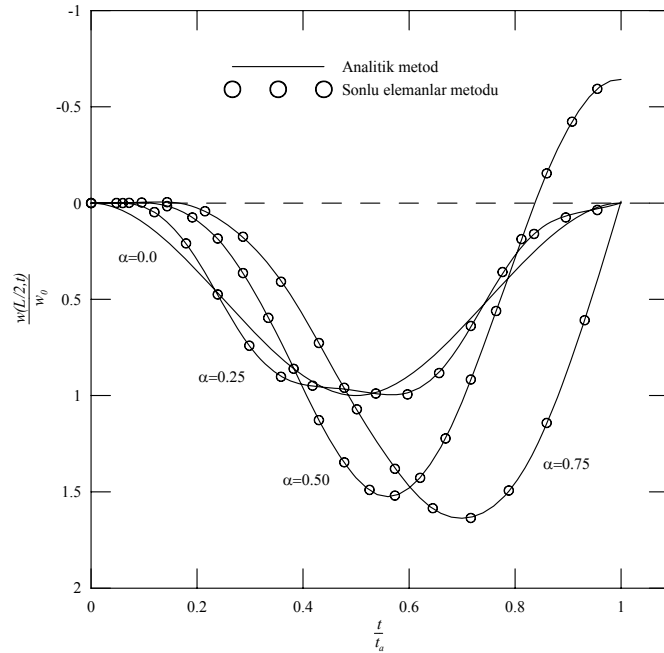
İki ucu ankastre elastik kiriş için kiriş orta noktasındaki yer değiştirmelerin hıza bağlı olarak zamanla değişimi Şekil 5'te verilmiştir. Basit kirişte olduğu gibi burada da hız arttıkça maksimum yer değiştirmeler artmaktadır. Ancak burada dikkati çeken bir husus, $\alpha = 0.50$ için yük kirişi terk ederken kiriş orta noktasında negatif yer değiştirmelerin ortaya çıkmasıdır.

Şekil 6 ve 7, konsol kiriş için kiriş uç noktasındaki yer değiştirmenin hıza bağlı olarak zamanla değişimini göstermektedir. Şekil 6' da, sol ucu ankastre sağ ucu serbest konsol kiriş için yer değiştirme-zaman değişimi verilmiştir. Hız arttıkça yer değiştirmelerin azaldığı görülmektedir. Şekil 7'de, sol ucu serbest sağ ucu ankastre kiriş için yer değiştirmenin zamanla değişimi görülmektedir. Dikkat edilirse $\alpha = 0.25$ için kiriş ucunda oldukça büyük pozitif ve negatif yer değiştirmelerin meydana geldiği görülmektedir. Hız arttıkça bu yer değiştirmeler azalmaktadır. Yük kirişi terk ettiği anda kiriş ucunda $\alpha = 0.25$ için negatif, diğer hız değerleri için pozitif yer değiştirmelerin kaldığı görülmektedir.

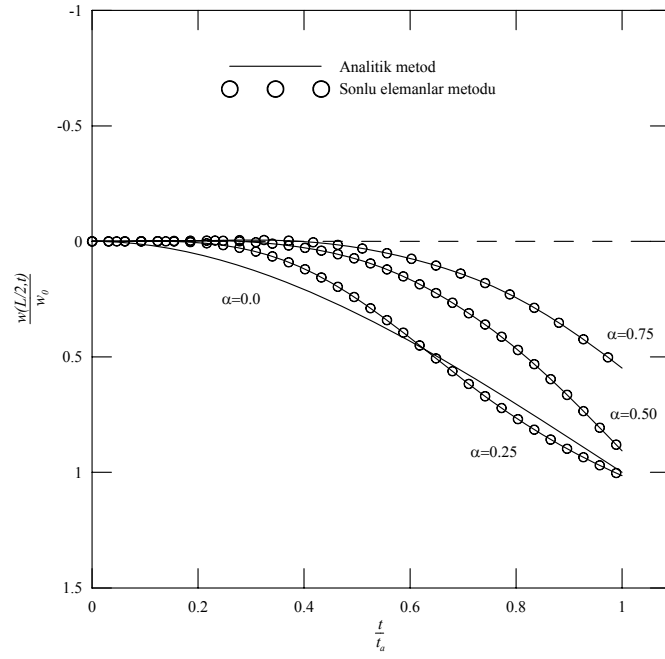
Yük kirişi terk ettikten sonra kiriş serbest titreşim hareketi yapacaktır. Dolayısıyla kirişin kritik kesitlerinde yük geçişini tamamladıktan sonra kalan yer değiştirmeler önemlidir. Çünkü bunlar serbest titreşim hareketi için başlangıç şartlarını oluşturmaktadırlar.



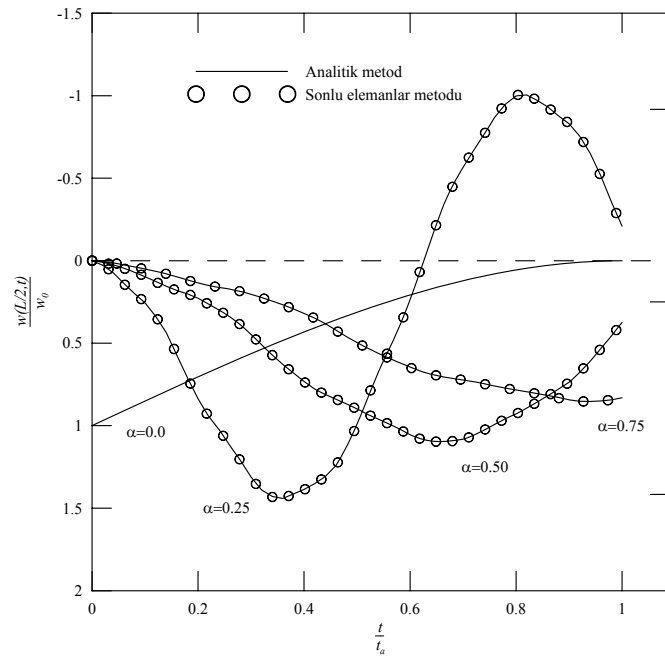
Şekil 4. Basit kirişte, kiriş orta noktasındaki yer değiştirmenin çeşitli hız değerleri için zamanla değişimi



Şekil 5. İki ucu ankastre kirişte, kiriş orta noktasındaki yer değiştirmenin çeşitli hız değerleri için zamanla değişimi



Şekil 6. Konsol kirişte, kiriş uç noktasındaki yer değiştirmenin çeşitli hız değerleri için zamanla değişimi



Şekil 7. Konsol kirişte, kiriş uç noktasındaki yer değiştirmenin çeşitli hız değerleri için zamanla değişimi

KAYNAKLAR

- [1] Fryba, L., "Vibration of Solids and Structures under Moving Loads", Groningen: Noordhoff International, 1972.
- [2] Hamada, T.R., "Dynamic Analysis of a Beam under a Moving Force: Double Laplace Transform Solution", *Journal of Sound and Vibration*, 74(2), 221-233, 1981.
- [3] Mackertich, S., "Moving Load on a Timoshenko Beam", *Journal of Acoustical Society of America*, 88(2), 1175-1178, 1990.
- [4] Baber, T.T., Massarelli, P.J., "Comparison of Modal Superposition Methods for the Analytical Solution to Moving Load Problems" Interim Report, Virginia Transportation Research Council, 1994.
- [5] Abu-Hilal, M., Zibdeh, H.S., "Vibration Analysis of Beams with General Boundary Conditions Traversed by a Moving Force", *Journal of Sound and Vibration*, 229(2), 377-388, 2000.
- [6] Abu-Hilal, M., Mohsen, M., "Vibration of Beams with General Boundary Conditions due to a Moving Harmonic Load", *Journal of Sound and Vibration*, 232(4), 703-717, 2000.
- [7] Zibdeh, H.S., Rackwitz, R., "Moving Loads on Beams with General Boundary Conditions", *Journal of Sound and Vibration*, 195(1), 85-102, 1996.
- [8] Abu-Hilal, M., "Vibration of Beams with General Boundary Conditions due to a Moving Random Load", *Archive of Applied Mechanics*, 72, 637-650, 2003.
- [9] Pesterev, A.V., Tan, C.A., Bergman, L.A., "A New Method for Calculating Bending Moment and Shear Force in Moving Load Problems", *Journal of Applied Mechanics*, 68, 252-259, 2001.
- [10] Pesterev, A.V., Yang, B., Bergman, L.A., Tan, C.A., "Revisiting the Moving Force Problem", *Journal of Sound and Vibration*, 261, 75-91, 2003.
- [11] Stanisic, M.M., "On a New Theory of the Dynamic Behavior of the Structures Carrying Moving Masses", *Ingenieur-Archiv*, 55, 176-185, 1985.
- [12] Mackertich, S., "Response of a Beam to a Moving Mass", *Journal of Acoustical Society of America*, 92(3), 1766-1769, 1992.
- [13] Akin, J.E., Mofid, M., "Numerical Solution For the Response of Beams with Moving Mass", *Journal of Structural Engineering*, 115(1), 120-131, 1989.
- [14] Mofid, M., Akin, J.E., "Discrete Element Response of Beams with Traveling Mass", *Advances in Engineering Software*, 25, 321-331, 1996.
- [15] Mofid, M., Shadnam, M., "On the Response of Beams with Internal Hinges, under Moving Mass", *Advances in Engineering Software*, 31, 323-328, 2000.
- [16] Yavari, A., Nouri, M., Mofid, M., "Discrete Element Analysis of Dynamic Response of Timoshenko Beams under Moving Mass, *Advances in Engineering Software*, 33, 143-153, 2002.
- [17] Ting, E.C., Genin, J., Ginsberg, J.H., "A General Algorithm for Moving Mass Problem", *Journal of Sound and Vibration*, 33(1), 49-58, 1974.
- [18] Sadiku, S., Leipholz, H.H.E., "On the Dynamic Responses of Elastic Systems with Moving Concentrated Masses", *Ingenieur-Archiv*, 57, 223-242, 1987.
- [19] Foda, M.A., Abduljabbar, Z., "A Dynamic Green Function Formulation for the Response of a Beam Structure to a Moving Mass", *Journal of Sound and Vibration*, 210(3), 295-306, 1998.

- [20] Yang, Y.B., Yau, J.D., Wu, Y.S., “Vehicle-Bridge Interaction Dynamics with Applications to High-speed Railways”, World Scientific Press, New Jersey, 2004.
- [21] Yoshida, D.M., “Dynamic Response of Beams and Plates to Moving Loads”, PhD Thesis, Stanford University, 1970.
- [22] Lin, Y.-H., Trethewey, M.W., “Finite Element Analysis of Beams subjected to Moving Dynamic Loads”, Journal of Sound and Vibration, 136(2), 323-342, 1990.
- [23] Olsson, M., “On the Fundamental Moving Load Problem”, Journal of Sound and Vibration, 145(2), 299-307, 1991.
- [24] Kim, S.-M., “Dynamic Response of Pavement Systems to Moving Loads”, PhD Thesis, The University of Texas at Austin, 1996.
- [25] Wu, J.-J., Whittaker, A.R., Cartmell, M.P., “The Use of Finite Elements Techniques for Calculating the Dynamic Response of Structures to Moving Loads”, Computers & Structures, 78, 789-799, 2000.
- [26] Lou, P., Dai, G.-L., Zeng, Q.-Y., “Finite-Element Analysis for a Timoshenko Beam subjected to a Moving Mass”, Proceedings of Institution of Mechanical Engineers-Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 220, 669-677, 2006.
- [27] Kulkarni, A., “Comparison of a Beam and Plate Structural Finite Elements under Moving Loads”, MSc Thesis, Wayne State University, Detroit, Michigan, 2006.

EK-1

Tablo E1. Klasik sınır şartlarına sahip kirişler için Green fonksiyonları

Sol uç	Sağ uç	$G(x,s)$ $x \leq s$
Basit	Basit	$\frac{L^3}{6EI} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{s}{L}\right) \left[2 \frac{s}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{s}{L}\right)^2\right]$
Ankastre	Ankastre	$\frac{L^3}{6EI} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{s}{L}\right)^2 \left[3 \frac{s}{L} - \frac{x}{L} - 2 \frac{sx}{L^2}\right]$
Ankastre	Serbest	$\frac{L^3}{6EI} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left[3 \frac{s}{L} - \frac{x}{L}\right]$
Serbest	Ankastre	$\frac{L^3}{6EI} \left(1 - \frac{s}{L}\right)^2 \left[2 - 3 \frac{x}{L} + \frac{s}{L}\right]$
Ankastre	Basit	$\frac{L^3}{12EI} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{s}{L}\right) \left[6 \frac{s}{L} - 2 \frac{x}{L} + \frac{xs^2}{L^3} - \frac{s}{L} \left(2 \frac{x}{L} + 3 \frac{s}{L}\right)\right]$
Basit	Ankastre	$\frac{L^3}{12EI} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{s}{L}\right)^2 \left[3 \frac{s}{L} - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{sx^2}{L^3}\right]$

$G(x,s)$ ifadelerinde x ve s yer değiştirilerek $x \geq s$ için Green fonksiyonları elde edilir.

